Toutes les matrices intervenant dans ce problème appartiennent à $\mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$, algèbre sur $\mathbf{C}$ des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients complexes.

Une base $\mathcal{B}$ étant choisie dans $\mathbf{C}^3$, on désigne par m l'endomorphisme de $\mathbf{C}^3$ associé à la matrice M.

Φ_M est le polynôme caractéristique de la matrice M.

$$(\Phi_M(\lambda) = \text{dét}\,(M - \lambda\, I) = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0\ .)$$

$E(\lambda_1)$ est le sous-espace propre associé à la valeur propre λ_1, c'est-à-dire la réunion de $\{\vec{O}\}$ et de l'ensemble des vecteurs propres associés à λ_1.

On rappelle que la dimension de $E(\lambda_1)$ est au plus égale à l'ordre de multiplicité de λ_1 dans le polynôme caractéristique.

N.B. — *Les candidats ne feront appel ni à l'étude du polynôme minimal d'un endomorphisme, ni au théorème d'Hamilton-Cayley, ces notions ne figurant pas au programme du concours.*

La question IV *peut être traitée indépendamment des autres.*

I

1. Que peut-on dire de l'intersection des sous-espaces propres associés à deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$?

2. *Montrer* que si une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$ admet trois valeurs propres distinctes ($\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$) les vecteurs propres $\vec{V}_1$, $\vec{V}_2$, $\vec{V}_3$ respectivement associés à λ_1, λ_2, λ_3, forment un système libre. En déduire que dans ce cas la matrice est diagonalisable.

3. On suppose que la matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$ a une valeur propre double λ_1.

Établir une condition nécessaire et suffisante, portant sur le rang de $M - \lambda_1 I$, pour que M soit diagonalisable.

4. On suppose que la matrice $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$ a une valeur propre triple λ_1.

Établir une condition nécessaire et suffisante, portant sur le rang de $M - \lambda_1 I$, pour que M soit diagonalisable.

5. Montrer que si F et G sont deux matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$ telles que $GF = 0$, elles ne peuvent avoir toutes les deux un rang supérieur ou égal à deux. (On pourra utiliser les endomorphismes f et g respectivement associés aux matrices F et G.)

Dans toute cette partie II on suppose que M est une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$ dont *les* 3 *valeurs propres sont distinctes.* On a vu en I que dans ce cas M est toujours diagonalisable. On pourra désigner par P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à une base de vecteurs propres.

1. Montrer que $\Phi_M(M) = -M^3 + a_2M^2 + a_1M + a_0I = 0$.

2. Quelle est la dimension du sous-espace E de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$ engendré par $\{I, M, M^2, M^3\}$?

Montrer que E est un sous-anneau commutatif de $\mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$.

III

Dans toute cette partie III, on suppose que $M \in \mathfrak{M}_3(\mathbf{C})$, *que* M *n'est pas une matrice scalaire* (donc $M \neq k\,I$) et qu'il existe deux nombres complexes a et b tels que

$$M^2 + a\,M + b\,I = 0\ . \tag{1}$$

1. Montrer que cette relation (1) équivaut à la relation :

$$(M - \alpha\, I)(M - \beta\, I) = 0\ , \tag{2}$$

où α et β sont deux nombres complexes qu'on exprimera en fonction de a et b.

2. Montrer que α et β sont des valeurs propres de M et que réciproquement toute valeur propre de M est égale à α ou β. Quelle relation existe-t-il entre le polynôme caractéristique Φ_M et le polynôme Π tel que $\Pi(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$?

3. *On suppose dans cette question* III. 3. *que* $\alpha \neq \beta$.

Montrer que dans ce cas M est diagonalisable. (On pourra utiliser certains résultats établis dans la partie I.)

En déduire que toutes les matrices vérifiant (1) sont semblables à l'une ou l'autre de deux matrices simples D_1 ou D_2 que l'on précisera.

Réciproquement, si une matrice est semblable à D_1 ou D_2, vérifie-t-elle une relation du type (1)?

.../...

4. *On suppose dans cette question* III. 4. *que* $\alpha = \beta$.

Montrer que dans ce cas la recherche des matrices solutions de (1) revient à la recherche des matrices N non nulles de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$ telles que $N^2 = 0$. Que peut-on dire des valeurs propres de N? du rang de N? N est-elle diagonalisable?

Soit n l'endomorphisme associé à N; montrer qu'on peut toujours trouver deux vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ tels que $n(\vec{W}) = \vec{0}$ et que $\vec{V}$, $n(\vec{V})$, $\vec{W}$ forment une base.

Quelle est, par rapport à cette base, la matrice associée à n?

En déduire que toutes les matrices non nulles, dont le carré est la matrice nulle, sont semblables à une matrice très simple N′ que l'on précisera.

Montrer que réciproquement toute matrice semblable à une matrice du type N′ est de carré nul.

En déduire toutes les solutions de (1) dans le cas $\alpha = \beta$.

5. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Montrer que M peut être mise sous la forme $M = Q\,D\,Q^{-1}$ où D est une matrice diagonale. Déterminer Q, Q^{-1}, D. A quelle relation du type (1) M satisfait-elle?

6. Trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de la matrice :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Mettre N sous la forme $N = R\,N'\,R^{-1}$ (Notations du III. 4.).

Déterminer R, R^{-1} et N′.

IV 1. x, y, z sont des fonctions d'une même variable réelle t, dérivables au moins à l'ordre 2 sur R et satisfaisant au système différentiel

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \\ z' = z \end{cases}$$

Déterminer la solution générale de ce système.

2. L'espace affine euclidien orienté E_3 est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On désigne par (Γ) la courbe décrite par le point M tel que $\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$, x, y, z étant la solution du système différentiel précédent telle que

$$x(0) = y(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad z(0) = 1.$$

a. Déterminer les coordonnées de M en fonction de t.

b. Dessiner la projection sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de l'arc de (Γ) correspondant à $-\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{3\pi}{4}$.

On donne :

$$e^{-\frac{\pi}{4}} = 0{,}46\ ; \quad e^{\frac{\pi}{4}} = 2{,}19\ ; \quad e^{\frac{\pi}{2}} = 4{,}81\ ; \quad e^{\frac{3\pi}{4}} = 10{,}55\ .$$

(Ces valeurs sont données à 5.10^{-3} près.)

c. Montrer que la droite OM fait un angle constant avec une direction fixe que l'on précisera.

En déduire que M appartient à un cône de révolution dont on précisera les éléments.

Quelle est l'équation du plan tangent à ce cône au point M(t)?

d. Déterminer le trièdre de Frenet en un point quelconque de (Γ) orientée dans le sens des t croissants.

Calculer le rayon de courbure de (Γ) en M(t). Exprimer, en fonction de t, les coordonnées du centre de courbure I de (Γ) en M(t).

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail